

Exercice 1 : embouteillages en ville

Un grand nombre de personnes venant de la vallée du Grésivaudan par l'A41 rejoignent chaque matin la porte de France afin de prendre l'autoroute E711 en direction de Lyon. Tous les matins, Grenoble subit des congestions importantes.

On veut donc optimiser ce réseau routier. Pour cela, on veut estimer sa capacité.

On choisit comme mesure la quantité de voitures qui arrivent du Grésivaudan à l'entrée de Grenoble juste avant le stade par unité de temps.

Question 1 – De quelques données a-t-on besoin ?

Question 2 – Décrivez précisément le problème que l'on souhaite résoudre

Exercice 2 : Canalisations (Jean-François Culus)

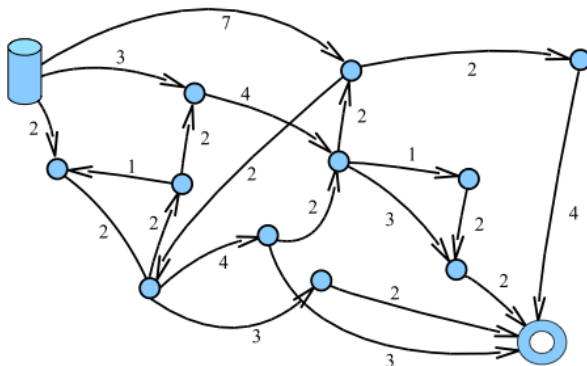
Une usine comporte généralement un gros réseau de canalisations, transportant l'eau d'une source unique (le point d'arrivée d'eau) vers une sortie unique : le tout à l'égout. Lors d'une extension de l'usine, on raccorde les anciennes canalisations aux nouvelles, augmentant donc les débits de certaines canalisations, jusqu'à saturation de certaines d'entre elles. On souhaite alors remplacer certaines de ces canalisations afin d'augmenter le flot global de l'usine.

Le but du problème est donc de savoir quelles sont les canalisations saturées qu'il serait souhaitable de remplacer par de nouvelles canalisations plus importantes.

Question 1 – Modélisez comme un problème de graphe

Exercice 3 : Acheminement du pétrole

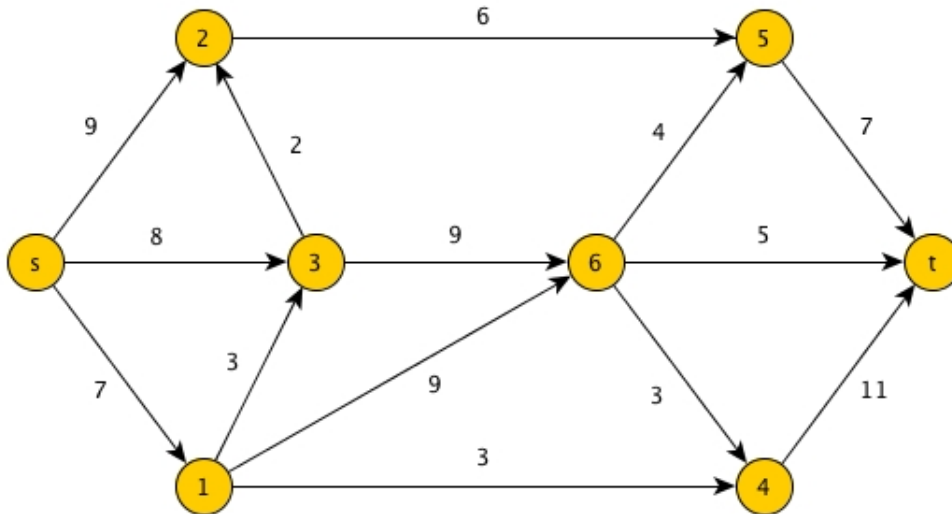
La compagnie pétrolière Inti T'schouff souhaite acheminer du pétrole par oléoduc vers un pays client. Le réseau d'oléoduc comporte plusieurs tronçons, chacun ayant une capacité maximale (en débit) à ne pas dépasser. Les tronçons sont directionnels. Sur le graphe suivant, la compagnie pétrolière est représentée par le cylindre, le client par le jeton. La capacité maximale de chaque arc est indiquée.



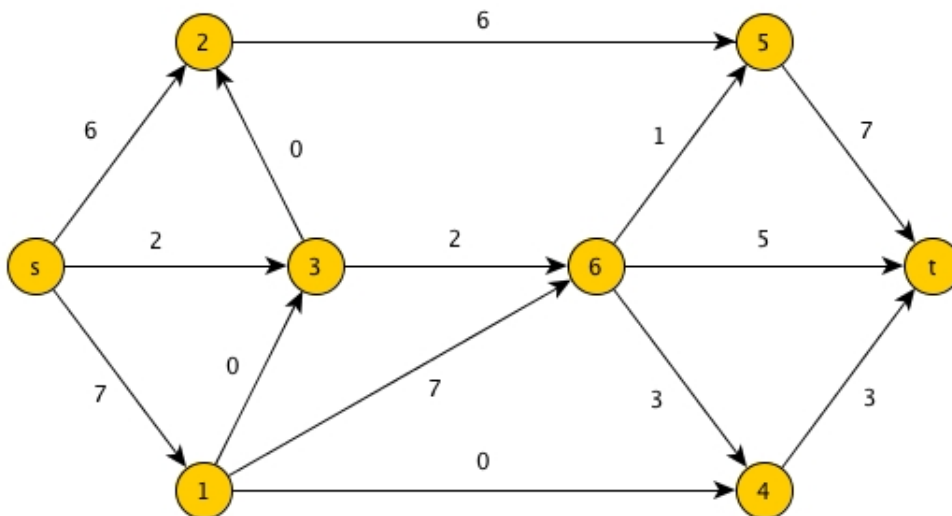
Question 1 – Quel est le débit maximum que la compagnie pétrolière peut envoyer vers le client via le réseau ?

Exercice 4 : Flot

Le dessin ci-dessous représente un graphe avec les capacités sur les arcs.

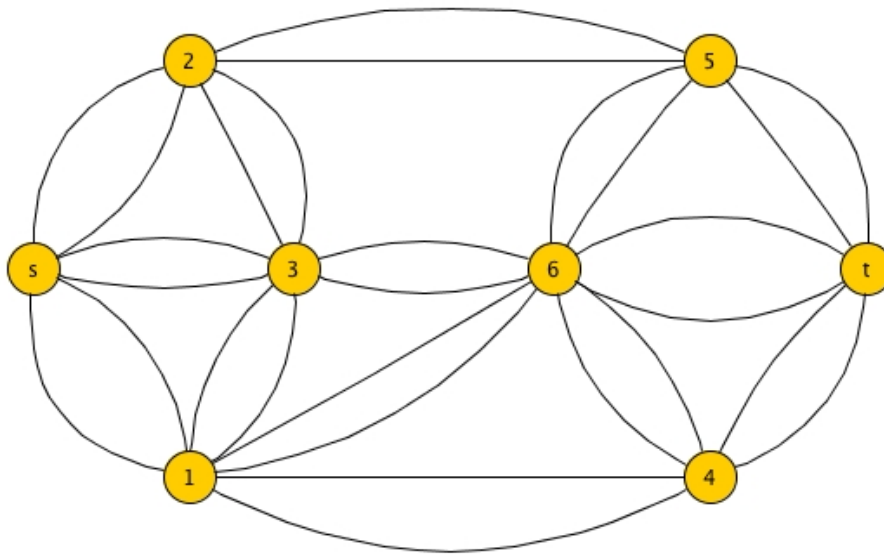


On a trouvé le flot f suivant

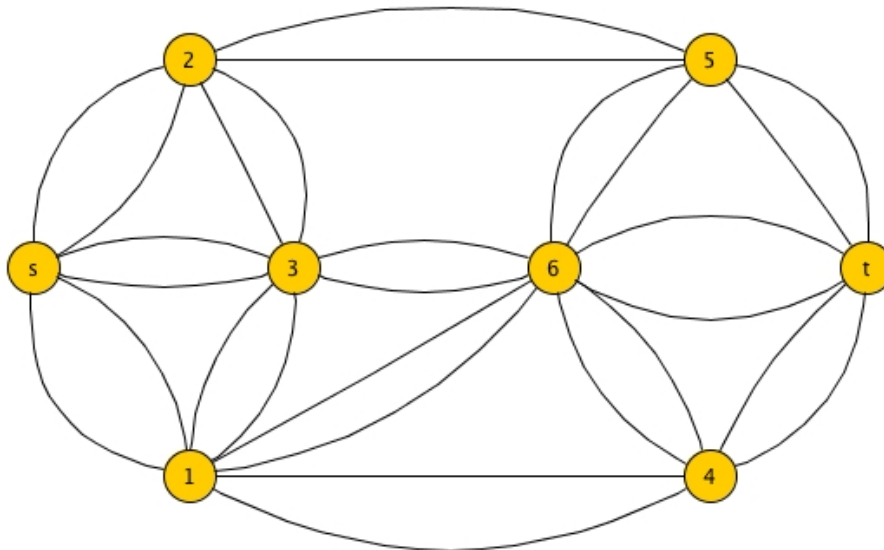


Question 1 – Vérifiez que f est bien un flot réalisable. Justifiez votre réponse.

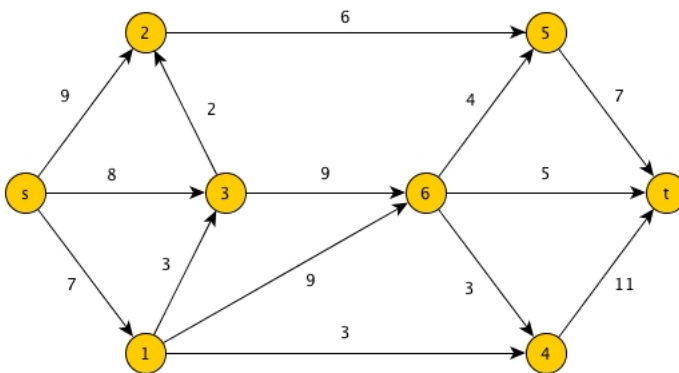
Question 2 – Représentez le graphe résiduel correspondant à ce flot sur le dessin suivant. Vous indiquerez clairement pour chaque arête le sens de la flèche et la capacité résiduelle.



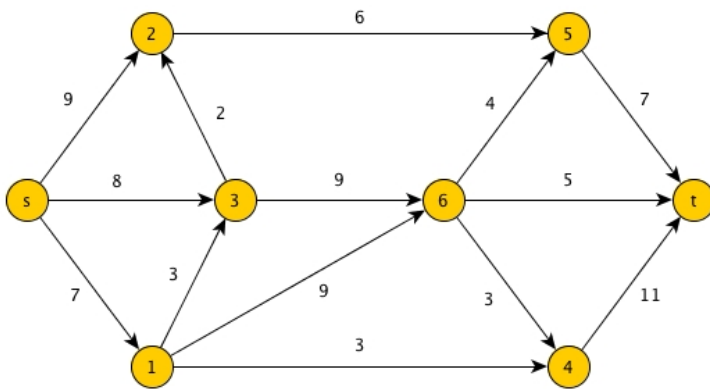
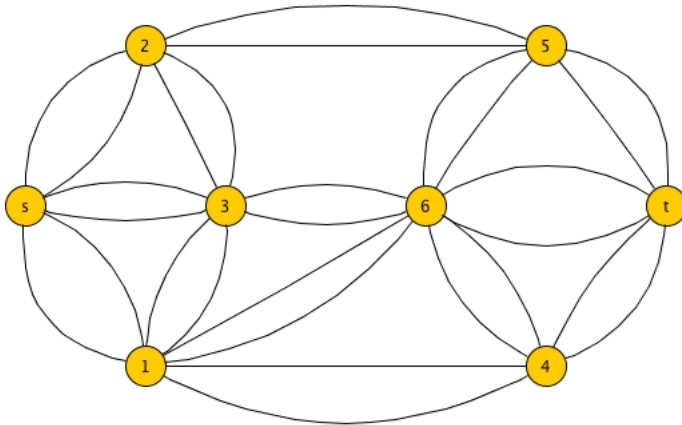
Question 3 – Représentez une st -chaîne f -augmentante sur le graphe suivant



Question 4 – Donnez, sur le graphe suivant, la nouvelle valeur f' du flot. Les valeurs affichées sont les capacités des arcs.

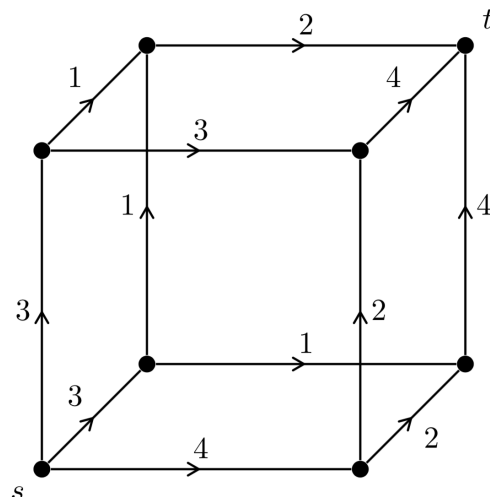
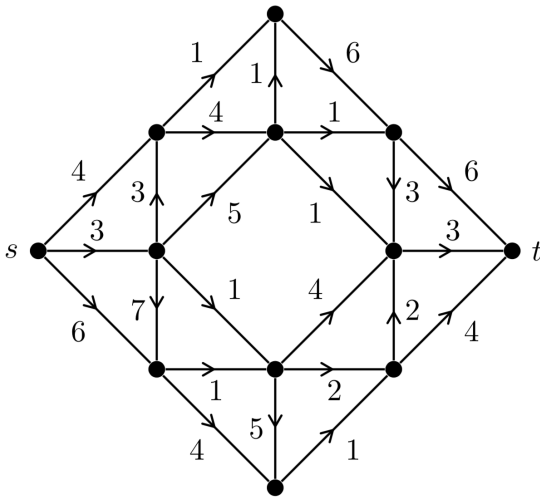


Question 5 – Est-ce que le flot f' est optimal ? précisez l'argument qui vous permet de justifier votre réponse sur l'un des deux graphe ci-dessous. Utilisez le graphe qui vous paraît le plus pertinent.



Exercice 5 :

Utilisez l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximum dans les graphes suivants. Vous prouverez pour chacun que la valeur du flot est bien maximum.



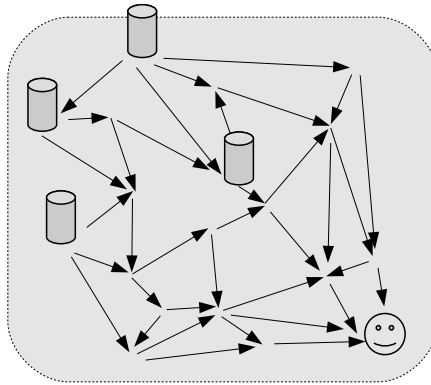


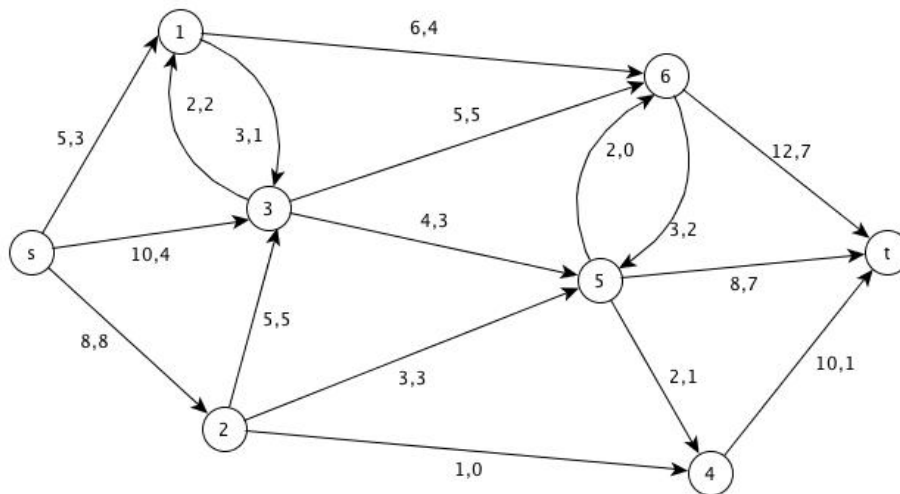
FIGURE 2 – Problème de flot multi-sources : quelle quantité maximum de pétrole pouvons-nous envoyer du producteur (tous sites de production confondus) vers le consommateur ?

Question 1 – Expliquez comment modéliser ce problème par un problème de flot maximum.

Question 2 – Même questions si on considère maintenant que le producteur a plusieurs sites de production et le consommateur plusieurs sites où il peut réceptionner le flux.

Exercice 8 : (Gerd Finke)

Le réseau ci-dessous décrit l'évacuation de l'eau pluviale de S vers T dans une région après un orage. Les paires de nombres sur les arcs représentent les capacités et les flots d'eau pluviale des canalisations. Par exemple, l'arc (A, E) a une capacité de 6 unités et il y a un flot de 4 unités qui le traverse.



Question 1 – Est-ce que le réseau est saturé, c'est-à-dire le flot d'eau de 15 unités est-il le maximum que le réseau peut supporter ? Sinon, trouver le flot maximum et déterminer une coupe de capacité minimale.

Question 2 – Le canal $(2, 3)$ est bouché. Quelle est la nouvelle valeur du flot maximum ?

On a réussi à déboucher le canal $(2,3)$. On souhaite augmenter le flot et l'on envisage une expansion de la capacité de l'arc $(2, 5)$. On discute actuellement une augmentation de 1 unité ou, à un coût supplémentaire, de 2 unités.

Question 3 – Quelle est votre recommandation ? Justifiez !

Retournons aux données initiales. Le flot total qui peut traverser le point 5 est limité à 7 unités.

Question 4 – Transformez le réseau en forme standard (capacités uniquement sur les arcs) et trouvez le nouveau flot maximum et une coupe minimale.

Exercice 9 : Primal et dual pour le flot

Question 1 – Formulez le problème de flot maximum comme un programme linéaire P_1 en utilisant une variable x_{ij} par arête représentant le flot circulant sur (i, j) .

Question 2 – Formulez le problème de flot maximum comme un programme linéaire P_2 en utilisant une variable x_p par chemin possible entre s et t représentant le flot circulant entre s et t le long de p (on notera P , l'ensemble des chemins possibles entre s et t dans le réseau de flot G). On pourra également remarquer qu'il n'est pas nécessaire que les x_p soient des variables entières.

Question 3 – Formulez et interprétez le programme linéaire dual de P_2 .

Question 4 – Quel théorème de la programmation linéaire vous permet ainsi de retrouver notre dernière observation sur la relation entre le flot maximum et la coupe minimale ?

