Arbres

Nadia Brauner et Yann Kieffer

Nadia.Brauner@imag.fr

SCIENCES POUR LA CONCEPTION, L'OPTIMISATION ET LA PRODUCTION

UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Plan

1. Arbres et forêts
2. Arbre enraciné

Plan

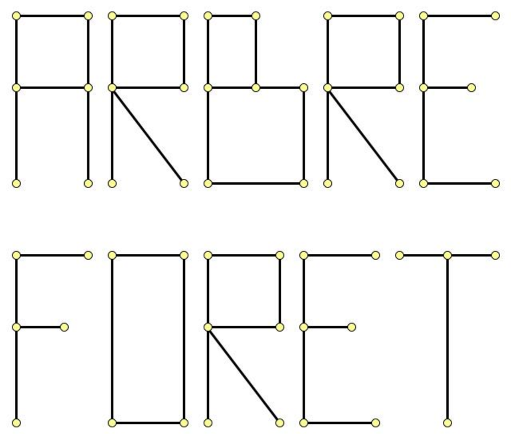
1 Arbres et forêts

2 Arbre enraciné

Graphe acyclique

G **acyclique** : ne contient pas de cycle

Quelles composantes connexes du graphe suivant sont acycliques ?



Graphe acyclique

Un graphe acyclique G à n sommets possède au plus $n-1$ arêtes.

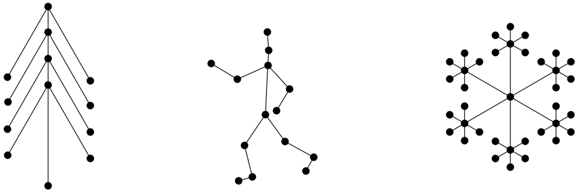
Preuve par induction sur le nombre de sommets du graphe.

- Si G est d'ordre 1, il ne possède aucune arête. ✔
- Supposons la propriété vraie à l'ordre n et établissons-la à l'ordre $n+1$. Soit $G=(V,E)$ acyclique à $n+1$ sommets.
- On sait que (cours *Cheminement*) si un graphe est acyclique, alors il possède un sommet, noté x, de degré au plus 1.
- Soit $G'=(V',E')$ le graphe d'ordre n tel que $V'=V\backslash\{x\}$ et E' est égal à E privé de l'arête incidente à x si elle existe.
- Le graphe G' est sans cycle, donc, par l'hypothèse d'induction, il possède au plus $n-1$ arêtes.
- Or $d(x)<2$ impose que E diffère de E' par au plus une arête. Donc $|E|$ est inférieure à n. ✔

Arbres et forêts

Forêt : graphe acyclique.

Arbre : graphe acyclique connexe



Dessins de *Invitation to mathematics* de Matoušek et Nešetřil

Chaque "bout" (composante connexe) de la forêt est un arbre...

Arbres et forêts

Quelques questions pour comprendre

- Un graphe complet peut-il être une chaîne ?
- Une chaîne est-elle toujours un arbre ?
- A quelle condition un arbre est-il un graphe complet ?
- A quelle condition un cycle est-il un graphe complet ?
- Si on retire une arête à un cycle, qu'obtient-on ?
- Un arbre peut-il être Eulérien ?
- Un arbre peut-il être Hamiltonien ?
- Quels arbres contiennent une chaîne Eulérienne ?

Arbres et forêts

Énumérez les **isomères des hydrocarbones saturés acycliques** (Caley 1857)

- un hydrocarbone : atomes de carbones (de valence 4) et atomes d'hydrogènes (de valence 1)
- hydrocarbones saturés : toutes les liaisons sont simples
- acycliques = pas de cycle

Si l'hydrocarbone a n atomes C, combien a-t-il de H ?

- isomères : même formule brute mais formules développées différentes.

Arbres et forêts

CH4	Méthane	
C2H6	Éthane	
C3H8	Propane	
C4H10	Butane	C-C-C-C
	Isobutane	C-C-C C
C5H12	Pentane	C-C-C-C-C
	2-Methylbutane	C C-C-C-C
	2, 2-dimethylpropane	C C-C-C C
C6H14	5 isomères	
C7H16	9 isomères	

Arbres et forêts

Question : trouver le nombre d'isomères pour n donné

$=$ trouver le nombre d'arbres sur n nœuds de degrés ≤ 4

1, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 9, 18, 35, 75, 159, 355, 802, 1858, 4347, 10359, 24894, 60523, 148284, 366319, 910726, 2278658, 5731580, 14490245, 36797588, 93839412, 240215803, 617105614, 1590507121, 4111846763, 10660307791, 27711253769

Arbres et forêts

Caractérisations d'un Arbre

Jamais deux sans trois

Soit T, un graphe d'ordre n. Deux des propriétés suivantes impliquent la troisième.

1. T est connexe
2. T a $n-1$ arêtes
3. T est acyclique

Arbres et forêts

- (1) + (3) $\Rightarrow$ (2)
  - T connexe $\Rightarrow$ T a au moins $n-1$ arêtes
  - T acyclique $\Rightarrow$ T a au plus $n-1$ arêtes

- (1) + (2) $\Rightarrow$ (3)
  - Soit C un cycle de T.
  - Si on enlève une arête de C, T reste connexe à $n-2$ arêtes. ✘

- (2) + (3) $\Rightarrow$ (1)
  - Soit c le nombre de composantes connexes de T
  - Chaque composante connexe C_i de T a v_i sommets et $v_i - 1$ arêtes (connexe et acyclique)
  - On a donc $\sum_i (v_i - 1) = \sum_i v_i - c = n - c$
  - et $\sum_i (v_i - 1) = n - 1$ (par (2))
  - D'où $c = 1$ et donc T connexe.

Arbres et forêts

Autres caractérisations d'un arbre

Les trois propositions suivantes sont équivalentes

- T est un arbre
- **connexe minimal** : la suppression de toute arête le déconnecte
- **acyclique maximal** : l'ajout de toute arête crée un cycle

Arbres et forêts

Soit $T = (V, E)$ un arbre

- Arbre $\Rightarrow$ Connexe minimal
  - T arbre $\Rightarrow |E| = n - 1$
  - T auquel on enlève une arête a $n - 2$ arêtes donc il ne peut pas être connexe.
  - Donc la suppression de n'importe quelle arête déconnecte T.

- Arbre $\Rightarrow$ Acyclique maximal
  - Soient x et y deux sommets de T tels que $xy \notin E$.
  - T est connexe donc il existe dans T une chaîne C de x à y
  - C est d'extrémités x et y et il ne contient pas l'arête xy
  - Donc C auquel on ajoute xy est un cycle
  - Donc l'ajout de n'importe quelle arête crée un cycle

Arbres et forêts

- Connexe minimal $\Rightarrow$ Arbre
  - Soit T connexe minimal.
  - Si T contient un cycle, la suppression d'une arête de ce cycle ne peut pas le rendre non connexe. Donc T est acyclique.
  - T est acyclique et connexe $\Rightarrow$ T est un arbre.

- Acyclique maximal $\Rightarrow$ Arbre
  - Supposons $T = (V, E)$ acyclique maximal
  - si T est non connexe alors, il existe x et y deux sommets de T tels qu'il n'y a pas dans T de chaîne de x à y (en particulier $xy \notin E$).
  - Donc l'ajout de l'arête xy à T ne crée pas de cycle : contradiction avec l'hypothèse acyclique maximal
  - Donc T est connexe et acyclique $\Rightarrow$ T est un arbre.

Arbres et forêts

Theorem

Soit G acyclique ayant au moins une arête, alors G possède un sommet de degré 1.

Déjà montré précédemment (cf. cours *Cheminement*).

Cheminement_Arbre(i)

Données : un sommet i avec $d(i) \geq 1$
Résultat : un sommet de degré 1

Soit j un sommet voisin de i
tant que $d(j) > 1$, **faire**
  soit k un voisin de j différent de i
  $i \leftarrow j$
  $j \leftarrow k$
retourner j

Arbres et forêts

Vérification de Cheminement_Arbre(i)

1. *tout s'exécute correctement*
   - Comme le graphe possède au moins une arête, i et j sont bien définis avant le **tant que**.
   - Dans la boucle, comme $d(j) > 1$, k est bien défini
2. *en un nombre fini d'étapes*
   - Les sommets visités forment une chaîne.
   - Il n'y a pas d'aller-retour le long d'une arête
   - Si un sommet est visité deux fois et qu'il n'y a pas d'aller retour le long d'une arête alors on obtient un cycle
   - acyclique $\Rightarrow$ un sommet n'est jamais visité deux fois
3. *en cas d'arrêt, on obtient l'objet souhaité*
   - sortie du tant que avec $d(j) = 1$

Remarque : **Cheminement_Arbre(i)** ne retourne pas i

Arbres et forêts

Theorem

Soit G acyclique ayant au moins une arête, alors G admet au moins deux sommets de degré 1.

preuve par récurrence sur le nombre de sommets du graphe.

- $H(n)$: soit G acyclique à n sommets et au moins une arête. Alors, G admet au moins deux sommets de degré 1.
- Cas de base $n = 2$: graphe composé d'une arête. ✔
- supposons $H(n)$ vraie au rang $n \geq 2$. On veut montrer que $H(n+1)$ est vraie.
- Soit G graphe acyclique d'ordre $n+1$ avec au moins une arête.
- Par le lemme précédent, on sait que G contient un sommet x tel que $d(x) = 1$. Soit $yx \in E$ l'arête incidente à x.

Arbres et forêts

- Considérons $G' = (V/\{x\}, E/\{xy\})$
- G' est acyclique et G' a n sommets.
- Si G' n'a pas d'arête. Alors, y, le voisin de x est de degré 1. ✔
- Si G' a au moins une arête, alors, on peut appliquer $H(n)$. Donc G' a au moins deux sommets de degré 1.
- Dans ce cas, au moins un de ces sommets n'est pas y. Donc G a au moins deux sommets de degré 1. ✔

Arbres et forêts

Une autre preuve

- Soit $C = (V', E')$ une composante connexe de G.
- $\sum_{v \in V'} d(v) = 2|E'| = 2|V'| - 2 \quad$ (C acyclique)
- Comme il n'y a pas de sommet de degré 0 dans C (graphe connexe), il existe au moins deux sommets qui ont un degré égal à 1.

Encore une autre preuve

- Soit x, un sommet de G avec $d(x) \geq 1$.
- Soit $y =$ **Cheminement_Arbre(**x**)**.
- Soit $z =$ **Cheminement_Arbre(**y**)**.
- On a $y \neq z$ et $d(y) = d(z) = 1$

Arbres et forêts

Et une dernière preuve

extrait de *Invitation to mathematics* de Matoušek et Nešetřil

Let $P = (v_0, e_1, v_1, ..., e_t, v_t)$ be a path of the maximum possible length in a tree $T = (V, E)$. Clearly the length of the path P is at least 1, and so in particular $v_0 \neq v_t$. We claim that both v_0 and v_t are end-vertices (*feuilles*). This can be shown by contradiction : if, for example, v_0 is not an end-vertex, then there exists an edge $e = \{v_0, v\}$ containing the vertex v_0 and different from the first edge $e_1 = \{v_0, v_1\}$ of the path P. Then either v is one of the vertices of the path P , i.e. $v = v_i, i \geq 2$ (in this case the edge e together with the portion of the path P from v_0 to v_i form a cycle), or $v \notin \{v_0, ..., v_t\}$ – in that case we could extend P by adding the edge e. In both cases we thus get a contradiction.

Arbres et forêts

Peut-on aller plus loin ?
Est-il vrai que G acyclique avec au moins une arête $\Rightarrow$ il existe au moins 3 sommets de degré 1 ?

non : une chaîne

$d(x) = 1$

- Dans G quelconque : **sommet pendant**
- Dans G arbre : **feuille**

Arbres et forêts

A quoi ça sert de savoir ça ?

Les deux assertions suivantes sont équivalentes pour un graphe $G = (V, E)$ et un sommet pendant $v \in V$:

- G est un arbre.
- $G' = (V \setminus \{v\}, E' \setminus \{xv\})$ est un arbre. avec $xv \in E$

Arbres et forêts

Encore une caractérisation des arbres

G est un arbre si et seulement si il existe une chaîne unique entre chaque paire de sommets de G

preuve ?

Certificat

Question oui/non avec **certificat** :
Est-ce que le graphe G est un arbre ?

oui : le nombre d'arêtes et le nombre de composantes connexes

non : S avec $cocycle(S) = \emptyset$ ou un cycle

autre oui : ordre $v_1, v_2, ...v_n$ sur les sommets du graphe tels que

- $G_i = (V_i, E_i) \quad i = 1, 2...n$
- $G_1 = G$,
- $G_{i+1} = (V_i \setminus \{v_i\}, E_i \setminus \{xv_i\})$ où v_i est une feuille de G_i et x est l'unique voisin de v_i dans G_i

Plan

1 Arbres et forêts

2 Arbre enraciné

Arbre enraciné

Arbre enraciné ou **Arborescence**

Souvent, pour manipuler un arbre, nous particularisons un sommet du graphe que nous appelons **racine** (notée r).

Le choix d'une racine revient dans un certain sens à orienter l'arbre, la racine apparaissant comme l'ancêtre commun à la manière d'un arbre généalogique. Le vocabulaire de la théorie des graphes s'en inspire directement : on parle de fils, de père, de frère...

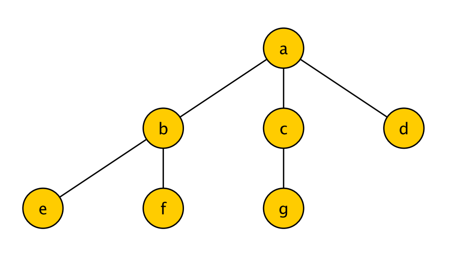
Arbre enraciné

Pour un arbre T de racine r

- **Le père** d'un sommet x est l'unique voisin de x sur le chemin de la racine à x. La racine r est le seul sommet sans père.
- **Les fils** d'un sommet x sont les voisins de x autres que son père.
- Une **feuille** est un sommet sans fils. Les feuilles sont de degré 1.
- La **hauteur** $h(T)$ de l'arbre T est la longueur de la plus longue chaîne de la racine à une feuille.

Vérifiez que ces notions sont bien définies.

Arbre enraciné



Si la racine est a,

- quelle est la hauteur de l'arbre ?
- quels sommets sont les fils de a ?
- quel sommet est le père de c ?

- Quelle racine permet d'avoir la plus grande hauteur ?
- Est-ce que les feuilles dépendent de la racine ?

Arbre enraciné

Exemples d'arbres enracinés

- Structure hiérarchique
- Ascendants d'une personne (arbre binaire...)
- Descendants d'une personne
- Expression arithmétique
- Système de fichiers
- Configurations du jeu du morpion, puissance 4, dames, échecs... (arbre de décision)

Arbre enraciné

La **profondeur d'un sommet** est la distance du sommet à la racine
La **profondeur d'un arbre** est la plus grande profondeur d'un sommet = **hauteur de l'arbre**

Arbre enraciné

Qui suis-je ?

- Je suis un sommet de profondeur i et tous mes voisins sont de profondeur $i-1$
- Je suis un sommet de profondeur 0
- Je suis un sommet sans père
- Je suis de degré 1 et je ne suis pas une feuille

Note : Les parcours de graphe vus aux chapitre précédent construisent implicitement un arbre enraciné.

Arbre enraciné

Écrire un algorithme qui calcule la profondeur d'un arbre.

profondeur(arbre sans sommet) $:=0$
profondeur(arbre) $:= 1+ \max_{v \text{ fils de la racine}}$ profondeur(arbre issus de v)

Arbres et forêts

Quelques questions pour comprendre

- Combien une forêt sur n sommets composée de c arbres contient-elle d'arêtes ?