Graphes : Arbres

N. Brauner *Université Grenoble Alpes*

Exercice 1 : **Arbres à 6 sommets**

Trouver tous les arbres à 6 sommets.

Exercice 2 : **Cycles dans un graphe et son complémentaire**

Soit G un graphe dont le nombre de sommets est supérieur ou égal à 5.

Question 1 – Montrer que G ou $\overline{G}$ contient un cycle.

Exercice 3 :

Soit T un arbre comportant au moins 3 sommets de degré 1.

Question 1 – Montrer que T contient au moins un sommet de degré au moins 3.

Exercice 4 :

Soit F une forêt ayant c composantes connexes et n sommets, avec $c \geq 1$ et $n \geq 1$.

Question 1 – Donner le nombre d'arêtes de F en fonction de c et n.

Exercice 5 : La séquence de degrés d'un arbre est 5, 4, 3, 2, 1, ..., 1. Determinez le nombre de "1" dans la séquence.

Exercice 6 : (N. Trotignon)

Une étoile est un arbre sur n sommets avec l'un des sommets adjacent aux $n - 1$ autres. Soit T un arbre sur $n \geq 2$ sommets. Montrer que $\overline{T}$ est connexe si et seulement si T n'est pas une étoile.

Exercice 7 : (Matoušek et Nešetřil)

Le Roi Uxamhwiashurh a quatre fils ; dix de ses descendants males ont trois fils chacun, quinze ont deux fils et tous les autres sont morts sans avoir eu d'enfant. Combien de descendants males le Roi Uxamhwiashurh a-t-il ?

Exercice 8 : **Le château d'eau :**

Une communauté de commune veut desservir un ensemble de villages en eau potable à partir d'un château d'eau placé dans l'un des villages. Selon des paramètres législatifs, géologiques, etc., le coût d'installation des canalisations pour transporter l'eau est estimé pour certaines paire de villages. Certains villages ne peuvent pas être reliés directement à cause du relief. On suppose que les capacités des canalisations sont illimitées. Il faut déterminer un réseau qui puisse acheminer de l'eau dans chaque village, et ce au moindre coût.

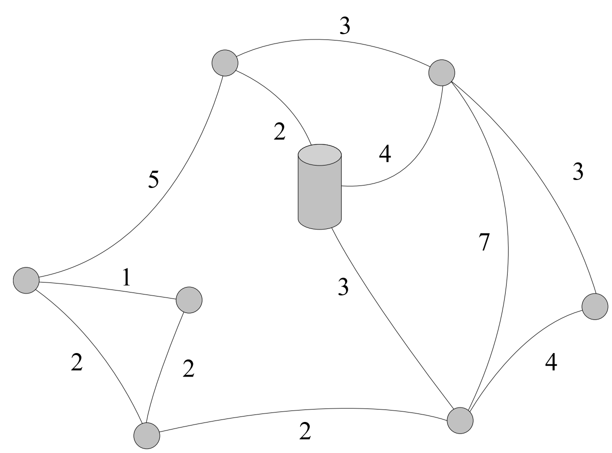


FIGURE 1 – Le château d'eau est représenté par le cyclindre, les disques étant les villages à desservir. Les chiffres représentent les coûts de liaison entre deux villages.

Question 1 – Proposez une solution pour ce problème.

Exercice 9 : **Monsieur le 9** (GI)

Un opérateur téléphonique veut installer un nouveau réseau de communication haut débit connectant les principales villes de France : Brignoud, Gières, Lans en Vercors, Monestier de Clermont, Tullins et Uriage.

Les coûts de connexion entre 2 villes dépendent de la distance, du relief, des lignes déjà existantes. Ils sont donnés dans le tableau suivant :

	G	B	L	U	T	M
G	-	5	8	2	2	11
B		-	7	4	8	12
L			-	6	7	13
U				-	3	12
T					-	10
M						-

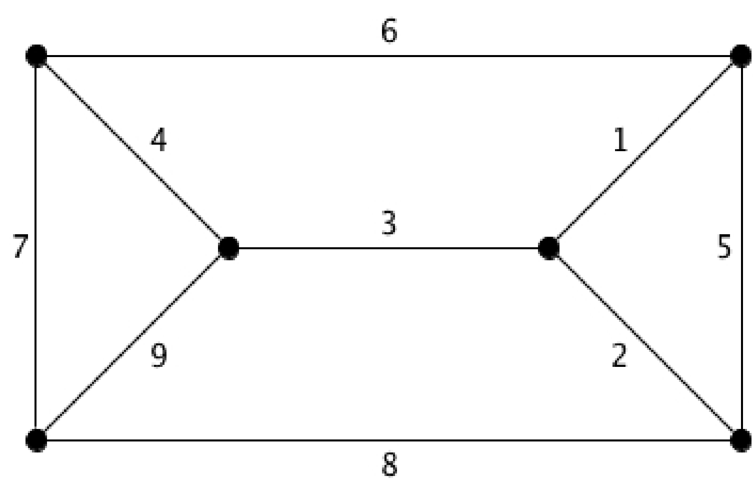
Question 1 – Quelles connexions permettent de relier les villes à moindre coût ?

Exercice 10 : (inspiré de *Pearls in Graph Theory* de N. Hartsfield et G. Ringel)

Dans le graphe du cube en dimension 3, on sait que quatre arêtes ont un poids de 1, quatre arêtes ont un poids de 2 et quatre arêtes ont un poids de 3. Quelle est une répartition possible des arêtes telle que le poids de l'arbre couvrant de poids minimum est 10. Même question si ce poids est 11.

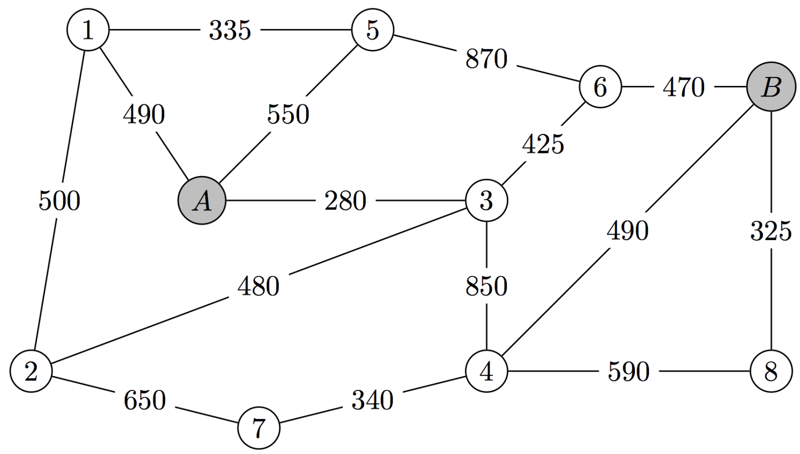
Exercice 11 : (inspiré de *Pearls in Graph Theory* de N. Hartsfield et G. Ringel)

Dans le graphe de la Figure ci-dessous, l'arbre couvrant de poids minimum a un poids de 17. Réarranger les poids des arêtes afin que les arbres couvrants de poids minimum aient un poids de 19.



Exercice 12 : **Camion** (J.-F. Hèche)

Le réseau ci-dessous représente une partie du réseau routier d'une ville. Les nœuds correspondent aux carrefours, les arêtes aux routes que l'on suppose toutes à double sens et les nombres sur les arêtes indiquent la hauteur maximale (en centimètres) qu'un véhicule peut avoir s'il désire emprunter la route correspondante.



Un livreur désire se rendre du point A au point B. Pour ceci, il veut déterminer la hauteur maximale x, en mètres, du camion qu'il peut utiliser.

Question 1 – Trouver manuellement la solution au problème du livreur.

Question 2 – Déterminer quel problème de la théorie des graphes permet de décider si le livreur, ayant un camion de hauteur x mètres, peut effectuer sa livraison en utilisant uniquement les routes du réseau donné.

Question 3 – Citer un algorithme permettant de résoudre le problème précédent.

Question 4 – Appliquer l'algorithme cité ci-dessus afin de déterminer la hauteur maximale du camion pour que la livraison soit possible et donner un itinéraire réalisable.

Exercice 13 : **Traductions**

Un document important, rédigé en anglais, doit être traduit en huit autres langues : allemand, danois, espagnol, français, grec, italien, néerlandais et portugais. Parce qu'il est plus difficile de trouver des traducteurs pour certaines langues que pour d'autres, certaines traductions sont plus chères que d'autres. Les coûts (en euros) sont indiqués dans la table ci-dessous.

de/à	dan.	néd.	ang.	fr.	all.	grec	it.	port.	esp.
dan.	$*$	90	100	120	60	160	120	140	120
néd.	90	$*$	70	80	50	130	90	120	80
ang.	100	70	$*$	50	60	150	110	150	90
fr.	120	80	50	$*$	70	120	70	100	60
all.	60	50	60	70	$*$	120	80	130	80
grec	160	130	150	120	120	$*$	100	170	150
it.	120	90	110	70	80	100	$*$	110	70
port.	140	120	150	100	130	170	110	$*$	50
esp.	120	80	90	60	80	150	70	50	$*$

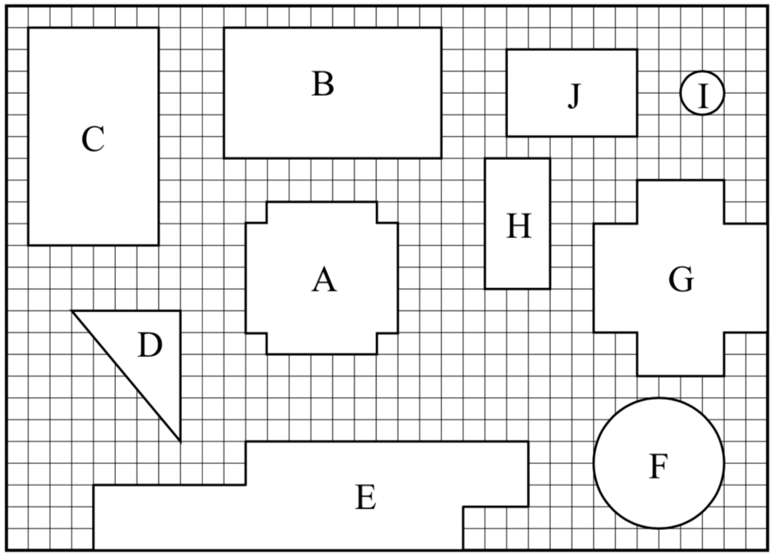
On veut obtenir une version du document dans chaque langue à un coût total minimum.

Question 1 – Modéliser le problème comme un problème d'un arbre couvrant de poids minimum. Décrire clairement le graphe.

Question 2 – Quelles traductions devront être faites afin d'obtenir une version dans chaque langue à un coût total minimum ?

Exercice 14 : **Découpe** (Wojciech Bienia)

A l'aide d'une scie à découper les courbes, on doit découper les 10 profils placés sur un morceau rectangulaire 35×25 de contre-plaqué comme l'indique le schéma ci-dessous.



Le problème consiste à trouver le tracé qui minimise la longueur totale de découpe réellement effectuée, c'est-à-dire que les passages en arrière, les déplacements répétés par une ligne ou un trou déjà découpés ne comptent pas comme une augmentation de la longueur. Pour découper un morceau placé à l'intérieur de la planche il faut obligatoirement commencer le déplacement de la scie à partir du bord de la planche, pour des raisons techniques.

Question 1 – Présentez le problème général comme un modèle classique de la théorie des graphes et justifiez cette modélisation.

Question 2 – Traitez l'exemple et proposez un plan optimal de découpe. Ce plan est-il unique ? (justifier)

Question 3 – La partie restante (quadrillée) du contre-plaqué peut-elle être en plusieurs morceaux à l'issue d'une découpe optimale ? Expliquez ce phénomène sur la base de la théorie des graphes.